* Ισοδύναμα Σύνολα $A \simeq B : \exists f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$ 9/1/17

$\mathbb{N}_a \simeq \mathbb{N}$

$f : x \to \frac{x}{2}$ 1-1 και επί

$\cdot \{1, \ldots v+1\} - \{k\} \simeq \{1, \ldots, v\} \quad k \in \{1, \ldots v+1\}$

Πρόταση: $(v \in \mathbb{N}) \; \nexists \; \emptyset \neq A \subsetneq T(v) \cdot T(v) \simeq A$

Απόδειξη: (Επαγωγή) (σελ. 170)

$v = 1: \quad T(1) = \{1\} \quad A = \emptyset$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $v \in \mathbb{N}$. Θα αποδ. ότι ισχύει για $v+1$. Ας είναι $A \neq \emptyset$. $A \subseteq T(v+1)$ με $A \simeq T(v+1)$

Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

↳ $v+1 \in A$

$A \simeq T(v+1) \Rightarrow \exists g : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} T(v+1)$

Τότε $g|_{A(v+1)} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \underbrace{T(v+1) - \{g(v+1)\}}_{\simeq T(v)}$

$T \subsetneq T(v)$

άτοπο από το προηγούμενο βήμα

$v+1 \notin A$:

$A \simeq T(v+1) \quad \exists f : T(v+1) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$.

Τότε $f/_{T(v)} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A - \{f(x+1$

$\simeq T(v)$

SOS

1

Μισό κομμάτι αποδ. ισχύει αυτό για οποιοδήποτε σύνολο;

Πρόταση: $(\nu > 1)$ $\emptyset \neq A \subsetneq T(\nu) \Rightarrow \exists\, \mu \in \mathbb{N}$ $\to \mu < \nu$, $\to A \simeq T(\mu)$

μετράει πόσα στοιχεία έχει το A

Τα γνήσια υποσύνολα του A έχουν λιγότερα στοιχεία από όσα έχει το A.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (Με επαγωγή)

$\nu = 2$: $A \subsetneq T(2) = \{1, 2\}$ → γν. υποσύνολα $\{1\} \simeq T(1)$, $\{2\} \simeq T(1)$ $\mu = 1$ ισχύει

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu \in \mathbb{N}$ $(\nu \geq 2)$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu + 1$. Ας είναι $A \subsetneq T(\nu+1)$, $A \neq \emptyset$

2 περιπτώσεις:

$\underline{\nu+1 \notin A}$: Αν $A = T(\nu)$ τότε $A \simeq T(\nu)$, $\nu = \mu < \nu+1$

Αν $A \subsetneq T(\nu)$ τότε από την επαγωγική υπόθεση $\exists\, k < \nu$ $A \simeq T(k)$ με $k < \nu < \nu+1$

$\nu+1 \in A$

$f : A \to \mathbb{N}$

$\{1, 2, \dots \nu, \nu+1\} = T(\nu+1)$

$T(\nu+1) = 1, 2, \ldots ? \quad \nu, \nu+1$

$A = \uparrow \uparrow \quad \updownarrow \nu+1$

αν βγάλω το ν+1 θα πάρω ένα $\subsetneq A$

Το ν+1 πάει στο λ. (από το A στο $T(\nu+1)$)

<u>Πόρισμα</u>: $T(m) = T(n) \iff m = n \quad (m, n \in \mathbb{N})$

<u>Απόδειξη</u>: Αν $m = n$ τότε $T(m) = T(n) \Rightarrow T(m) \simeq T(n)$ (i)

Αντίστροφα, έστω $T(m) = T(n)$. Έστω ότι $m < n$. Τότε $T(m)$ & $T(n)$

$\xRightarrow{\text{προηγ. πρόταση}} T(m) \neq T(n)$ άτοπο, άρα $m \geq n$ (I)

Ομοίως, προκύπτει ότι $m \leq n$ (II) $\Rightarrow m = n$

<u>6.5</u> <u>Ορισμός</u>: $\emptyset \neq A$ πεπερασμένο αν $\exists\, k \in \mathbb{N}$ $A \simeq T(k)$

<u>Πρόταση</u>: $B \subseteq A$ πεπερασμένο → B πεπερ. / → card B ≤ card A

αν $B \subsetneq A$ τότε

→ card B ≤ card A

<u>Απόδειξη</u>: Ας είναι A πεπερασμένο σύνολο με card A = ν και $B \subseteq A$

Αν $B = \emptyset$ τότε card B = 0 < ν

Αν B = A, τότε card B = card A = ν

Έστω ότι $B \neq \emptyset$, $B \neq A$

Επειδή card A = ν, έπεται ότι $A \simeq T(\nu)$, άρα $\exists\, f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} T(\nu)$ τότ

$f/_B \quad B \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} f(B)$ δηλ. $B \simeq f(B)$

άρα $f(B) \subsetneq T(\nu)$ $[= f(A)]$

άρα από πρόταση $\exists\ \mu < \nu$ $f(B) \simeq T(\mu)$ και συνεπώς

$B \simeq T(\mu)$ $\mu < \nu$ // $\mu = \operatorname{card} B$

Το γν. υποσύνολο θα έχει λιγότερα στοιχεία

<u>Πρόταση:</u> (6.5.3 σελ 173)

Ας είναι A, B πεπερασμένα τότε:

i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$

ii) $\operatorname{card}(A - B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B)$

iii) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$

<u>Απόδειξη:</u> αν $A \cap B \neq \emptyset$

i) Ας είναι $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ $\operatorname{card} A = \kappa$ και $\operatorname{card} B = \lambda$, $A \cap B = \emptyset$, τότε

$\exists\ f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} T(\kappa)$, $g : B \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} T(\lambda)$

$h : A \cup B \to T(\kappa + \lambda)$

$b \to \kappa + g(b)$ πρέπει να αποδ. ότι είναι 1-1 και επί.

$A \cap B \to (1, 2 \dots, \kappa), \kappa+1 \dots, \kappa+\lambda$

$g : 1, 2$

Γιατί είναι 1-1 και επί το αποδ. μέσω ορισμού